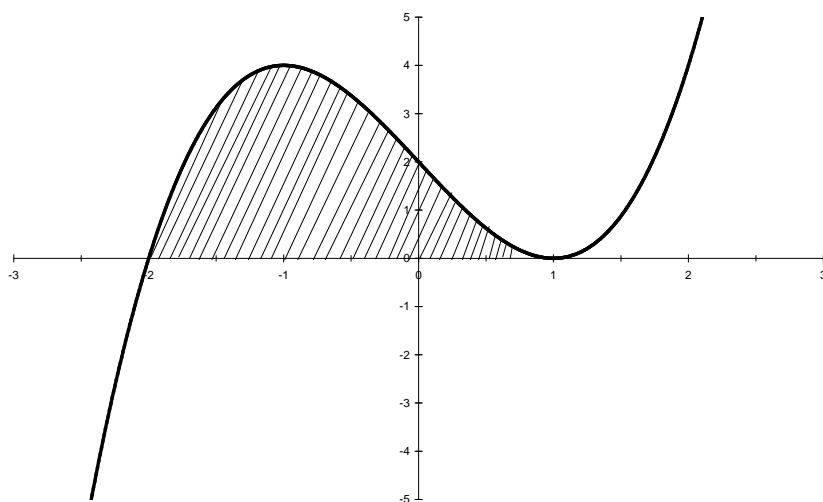


## Opción A

1.- Se sabe que la gráfica de la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  es la que aparece en el dibujo



a) Determina la función [1'5 puntos]

b) Calcula el área de la función sombreada [1 punto]

a)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 2 \Rightarrow 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2 \Rightarrow c = 2 \\ f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = 0 \Rightarrow a + b = -3 \\ f'(-1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ -2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -a - b = 3 \\ -2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow -3a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow 0 + b = -3 \Rightarrow b = -3$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

b)

$$A = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \frac{1}{4} \cdot [x^4]_{-2}^1 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-2}^1 + 2 \cdot [x]_{-2}^1$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot [1^4 - (-2)^4] - \frac{3}{2} \cdot [1^2 - (-2)^2] + 2 \cdot [1 - (-2)] = \frac{1}{4} \cdot (1 - 16) - \frac{3}{2} \cdot (1 - 4) + 2 \cdot (1 + 2)$$

$$A = -\frac{15}{4} - \frac{3 \cdot (-3)}{2} + 2 \cdot 3 = -\frac{15}{4} + \frac{9}{2} + 6 = \frac{-15 + 18 + 12}{4} = \frac{15}{4} u^2$$

2.- Dada la función  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{e^x}$

a) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función **f [1.5 puntos]**

b) Calcular los máximos y mínimos relativos de **f [1 punto]**

a)

$$f'(x) = \frac{(4x-3)e^x - e^x(2x^2-3x)}{e^{2x}} = \frac{(4x-3-2x^2+3x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-2x^2+7x-3}{e^x} = -\frac{2x^2-7x+3}{e^x}$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25 > 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7+5}{4} = 3 \\ x = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-3)(2x-1)$$

$$f'(x) = (-1) \frac{(x-3)(2x-1)}{e^x} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow (-1) \frac{(x-3)(2x-1)}{e^x} > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ 2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$-\infty \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad 3 \qquad \qquad \qquad \infty$$

$-1 < 0$	(-)	(-)	(-)
$x > 3$	(-)	(-)	(+)
$x > \frac{1}{2}$	(-)	(+)	(+)
$e^x > 0$	(+)	(+)	(+)
<b>Solución</b>	(-)	(+)	(-)

**Crecimiento**  $\forall x \in \mathbb{R} / \frac{1}{2} < x < 3$

**Decrecimiento**  $\forall x \in \mathbb{R} / \left(x < \frac{1}{2}\right) \cup (x > 3)$

b)

$$\text{Mínimo relativo} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{\sqrt{e}}{e} \Rightarrow \text{De decrecimiento pasa}$$

a crecimiento

$$\text{Máximo relativo} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3}{e^3} = \frac{18 - 9}{e^3} = \frac{9}{e^3} \Rightarrow \text{De crecimiento pasa a}$$

decrecimiento

3.- Resolver la ecuación matricial  $\mathbf{B} \cdot (2\mathbf{A} + \mathbf{I}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [2'5 \text{ puntos}]$$

$$\mathbf{AXA} = \mathbf{B}(2\mathbf{A} + \mathbf{I}) - \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{AXA} = \mathbf{B}(2\mathbf{A} + \mathbf{I} - \mathbf{I}) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AXAA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}2\mathbf{BAA}^{-1} \Rightarrow \mathbf{IXI} = \mathbf{A}^{-1}2\mathbf{BI} \Rightarrow$$

$$\mathbf{X} = 2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

4.- Dada las rectas  $r \equiv \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$  y  $s \equiv \frac{x-1}{-2} = y+1 = z-2$

a) Determinar su posición relativa [1 punto]

b) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte [1'5 puntos]

a) Analizaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, de serlo estudiaremos si tienen punto común si es afirmativo las rectas son coincidentes sino paralelas.

Si no hay igualdad o proporcionalidad buscaremos si tienen un punto común, si eso sucede son rectas secantes o que se cortan en un punto.

De no darse ninguno de los supuestos anteriores las rectas se cruzan

a)

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ z = 3 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (-2, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow \text{No son paralelas ni coincidentes}$$

Veamos si tienen un punto P común

$$\begin{cases} 2 + \lambda = 1 - 2\mu \\ \lambda = -1 + \mu \\ 3 + \lambda = 2 + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = -1 \\ \lambda - \mu = -1 \\ \lambda - \mu = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = -1 \\ -\lambda + \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow 3\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \lambda - 0 = -1 \Rightarrow \lambda = -1$$

Sistema Compatible Deter min ado  $\Rightarrow$  Las rectas son sec antes o se cor tan en un punto

b)

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (-2, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{|(1, 1, 1) \cdot (-2, 1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-2 + 1 + 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{0}{3\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = \arccos 0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \Rightarrow \text{Son perpendiculares}$$

**Continuación del Problema 4 de la opción A**

*b)Continuación*

$$\text{Con } \lambda = -1 \Rightarrow P \begin{cases} x = 2 - 1 \\ y = -1 \\ z = 3 - 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto de corte entre las rectas} \Rightarrow P(1, -1, 2)$$

## Opción B

1.- Sabiendo que la función  $f(x) = \frac{3x-4}{x^3 + bx^2 + 8x-4}$  es discontinua en  $x = 2$ , calcula b y justifica razonadamente el comportamiento de la función en la proximidad de los puntos de discontinuidad **[2'5 puntos]**

$$\text{Cuando } x = 2 \Rightarrow x^3 + bx^2 + 8x - 4 = 0 \Rightarrow 2^3 + b \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 4 = 0 \Rightarrow 8 + 4b + 16 - 4 = 0 \Rightarrow 4b + 20 = 0$$

$$4b = -20 \Rightarrow b = -\frac{20}{4} = -5 \Rightarrow$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Rightarrow \text{Veamos si hay mas puntos de discontinuidad}$$

Por Ruffini 
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 2 & & 2 & -6 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \quad (x-2)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+1}{2} = 2 \\ x = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{3x-4}{(x-2)^2 \cdot (x-1)}$$

$$\text{Cuando } x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{3 \cdot 2 - 4}{(2^+ - 2)^2 \cdot (2^+ - 1)} = \frac{6 - 4}{(0^+)^2 \cdot 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{3 \cdot 2 - 4}{(2^- - 2)^2 \cdot (2^- - 1)} = \frac{6 - 4}{(0^-)^2 \cdot 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{Cuando } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3 \cdot 1 - 4}{(1^+ - 2)^2 \cdot (1^+ - 1)} = \frac{3 - 4}{(-1)^2 \cdot 0^+} = \frac{-1}{1 \cdot 0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3 \cdot 1 - 4}{(1^- - 2)^2 \cdot (1^- - 1)} = \frac{3 - 4}{(-1)^2 \cdot 0^-} = \frac{-1}{1 \cdot 0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

2.- a) Calcular el valor de **a** para que la integral entre **0** y **a** de la función  **$xe^x$**  sea **1**  
**[1'25 puntos]**

b) Resolver la integral indefinida  $\int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}}$  **[1'25 puntos]**

a)

$$\int_0^a xe^x dx = 1 \Rightarrow [xe^x]_0^a - \int_0^a e^x dx = 1 \Rightarrow (ae^a - 0 \cdot e^0) - [e^x]_0^a = 1 \Rightarrow (ae^a - 0 \cdot 1) - (e^a - e^0) = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^x dx = dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

$$(ae^a - 0) - (e^a - 1) = 1 \Rightarrow ae^a - e^a + 1 = 1 \Rightarrow ae^a - e^a = 0 \Rightarrow (a-1)e^a = 0 \Rightarrow a-1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

b)

$$I = \int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t}{t^2+t} dt = 2 \int \frac{t}{(t+1)t} dt = 2 \int \frac{dt}{t+1} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln u = \ln u^2 = \ln (t+1)^2$$

$$x+1 = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$t+1 = u \Rightarrow dt = du$$

$$I = \int \frac{dx}{x+1+\sqrt{x+1}} = \ln (\sqrt{x+1} + 1)^2 + K$$

3.- Estudiar el siguiente sistema según los valores del parámetro  $a$  
$$\begin{cases} a^2x + 3y + 2z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Resolverlo en los casos posibles [2'5 puntos]

Es un sistema homogéneo y por ello, es Compatible Determinado, con solución trivial, en aquellos casos en que el determinante de los coeficientes no es nulo, siendo Compatible Indeterminado cuando es determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & 3 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4a^2 + 24 + 2a + 16 - a^2 - 12a = -5a^2 - 10a + 40 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -5a^2 - 10a + 40 = 0$$

$$5a^2 + 10a - 40 = 0 \Rightarrow \Delta = 10^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-40) = 100 + 800 = 900 > 0 \Rightarrow a = \frac{-10 \pm \sqrt{900}}{2 \cdot 5} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-10 + 30}{10} \\ a = \frac{-10 - 30}{10} \end{cases}$$

(Para todo)  $\forall a \in \mathbb{R} - \{-4, 2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$

Sistema Compatible Determinado  $\Rightarrow$  Solución  $\Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow$  Solución trivial

Cuando  $a = -4$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 16 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 16 & 3 & 2 & 0 \\ -16 & -4 & 4 & 0 \\ -16 & -2 & -8 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 16 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 0 \Rightarrow$$

$$z = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Rightarrow -y + 6z = 0 \Rightarrow y = 6z \Rightarrow$$

$$16x + 3 \cdot 6z + 2z = 0 \Rightarrow 16x + 20z = 0 \Rightarrow 16x = -20z \Rightarrow x = -\frac{20}{16}z = -\frac{5}{4}z \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left( -\frac{5}{4}\lambda, 6\lambda, \lambda \right)$$

Cuando  $a = 2$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & -4 & 0 \\ -8 & -1 & -4 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 0 \Rightarrow$$

$$z = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 4x + 2z = 0 \Rightarrow$$

$$2z = -4x \Rightarrow z = -2x \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (\mu, 0, -2\mu)$$

4.- Determinar la ecuación general (implícita) del plano paralelo a las rectas

$$r \equiv x = y + 1 = z \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{y que pasa por el origen de coordenadas [2'5 puntos]}$$

El vector director del plano buscado  $\pi$  es perpendicular a las dos rectas y lo hallaremos calculando el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

Una vez hallado este vector es perpendicular al vector determinado por el origen de coordenadas  $\mathbf{O}$ , que va a contener, y por el punto  $\mathbf{G}$  que es el que genera el plano y, debido a ello el producto escalar de ambos es nulo y la ecuación del plano que se pide

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{v}_s = (3, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_\pi = (0, 3, -3) \equiv (0, 1, -1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (0, 1, -1) \\ \vec{OG} = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{OG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{OG} = 0 \Rightarrow (0, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv y - z = 0$$